PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2022

Studijní program: Finanční a pojistná matematika

Varianta A

Řešení úloh pečlivě odůvodněte. Věnujte pozornost ověření předpokladů použitých matematických vět.

Úloha 1 (25 bodů)
Nalezněte maximum a minimum funkce

$$f(x, y) = \operatorname{arccotg}(xw)$$

na množině

$$M = \left\{[x, y, z, w] \in \mathbb{R}^4;\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4w^2 = 1, x + y + z + w = 0, x - y + z - w = 0\right\}.$$

Úloha 2 (25 bodů)
Spočtěte $\displaystyle\int_M 3y^6$, kde

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le xy \le 3,\ 2x \le y^2 \le 4x\right\}.$$

Úloha 3 (25 bodů)
Uvažujme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ z Weibullova rozdělení s hustotou

$$f(x; \alpha, \beta) = \alpha\beta^{-\alpha}x^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right\} \mathcal{I}\{x > 0\}, \quad \alpha > 0, \beta > 0,$$

přičemž hodnota parametru α je známá.

(a) Najděte maximálně věrohodný odhad pro neznámý parametr $\beta > 0$.
(b) Odvoďte asymptotické rozdělení maximálně věrohodného odhadu pro neznámý parametr β.
(c) Sestavte
  (i) test poměrem věrohodnosti,
  (ii) Raoův skórový test,
  (iii) Waldův test
  pro nulovou hypotézu $H_0 : \beta = \beta_0$ oproti alternativě $H_1 : \beta \neq \beta_0$.

Úloha 4 (25 bodů)
Uvažujte dvě aktiva A a B. Jejich výnosy jsou náhodné veličiny se středními hodnotami $\mu_A = 4$ a $\mu_B = 2$ a směrodatnými odchylkami $\sigma_A = 2$ a $\sigma_B = 1$ (vše v procentech). Korelační koeficient výnosů aktiv A a B označme ρ. Investor chce bohatství ve výši $W = 1$ investovat do portfolia složeného z těchto dvou aktiv (část alokovanou do aktiva A označme x).

(a) Vyjádřete očekávaný výnos z portfolia v závislosti na x. Pro jaké portfolio je tento výnos největší a jak velký tento výnos bude?
(b) Vyjádřete rozptyl výnosu z portfolia v závislosti na x a na ρ. Pro jaké x je tento rozptyl nejmenší (x může záviset na ρ)?
(c) Jaké portfolio zajistí minimální rozptyl v případě nezávislosti výnosů aktiv A a B? Pro jaké hodnoty ρ budeme rozptyl výnosu minimalizovat investováním veškerého bohatství do aktiva B?

(d) Nyní uvažujte $\rho = -1$ a předpokládejte, že výnosy aktiv A a B mají sdružené normální rozdělení. Jako míru rizika uvažujte hodnotu v riziku s hladinou 95 % ($\mathrm{VaR}_{0,95}$) – ta udává horní mez pro budoucí ztrátu, která nebude překročena s danou pravděpodobností. Vyjádřete závislost $\mathrm{VaR}_{0,95}$ na x. Jste-li rizikově averzní investor, chcete tuto hodnotu spíše minimalizovat nebo maximalizovat? Najděte portfolio, které je optimální z hlediska $\mathrm{VaR}_{0,95}$.
Poznámka: 95% kvantil normovaného normálního rozdělení je přibližně $u_{0,95} = 1,645$.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2022

Studijní program: Finanční a pojistná matematika

Varianta B

Řešení úloh pečlivě odůvodněte. Věnujte pozornost ověření předpokladů použitých matematických vět.

Úloha 1 (25 bodů)
Nechť
$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

(a) Určete definiční obor funkce f.
(b) Spočtěte totální diferenciál funkce f v bodě $(1, 1)$, pokud existuje.
(c) Najděte všechny lokální extrémy funkce f.
(d) Jaké je supremum a infimum funkce f a nabývá se ho?

Úloha 2 (25 bodů)
Spočtěte
$$\int_0^4 \frac{2x + 1}{2x + 5\sqrt{2x + 1} + 7} \, \mathrm{d}x.$$

Úloha 3 (25 bodů)
Uvažujme náhodný výběr $(X_1, Y_1)^\top, \dots, (X_n, Y_n)^\top$ z rozdělení s hustotou
$$f(x, y; \phi) = \phi x \exp\{-\phi x y\} \, \mathcal{I}\{x \in (0, 1), y > 0\}, \quad \phi > 0.$$

(a) Najděte maximálně věrohodný odhad pro neznámý parametr $\phi > 0$.
(b) Odvoďte asymptotické rozdělení maximálně věrohodného odhadu pro neznámý parametr ϕ.
(c) Sestavte
 (i) test poměrem věrohodnosti,
 (ii) Raoův skórový test,
 (iii) Waldův test

pro nulovou hypotézu $H_0 : \phi = 1$ oproti alternativě $H_1 : \phi \neq 1$.

Úloha 4 (25 bodů)
Kupónový dluhopis má nominální hodnotu N a dobu splatnosti n let. Kupónové platby jsou roční polhůtné dané sazbou r. K datu splatnosti je vyplacena nominální hodnota.

a) Zapište rovnici pro výpočet výnosu do splatnosti, je-li dluhopis zakoupen k datu emise za cenu P_0.

b) Vypočítejte ze zapsané rovnice výnos do splatnosti, je-li $P_0 = N$.

c) Rozhodněte, zda je výhodné koupit dluhopis k datu emise za cenu $P_0 < N$ a za cenu $P_0 > N$. Hodnotící úroková míra je rovna kupónové sazbě r. Odpověď zdůvodněte.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2022

Studijní program: Finanční a pojistná matematika

Varianta A – **Řešení**

Úloha 1 (25 bodů)

Z rovnic $x + y + z + w = 0$ a $x - y + z - w = 0$ plyne $z = -x$ a $w = -y$. Stačí tedy hledat extrémy funkce $\operatorname{arccotg}(-xy)$ na množině $N := \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 4x^2 + 6y^2 = 1\}$. Označme $g(x, y) = xy$. Protože je funkce $\operatorname{arccotg}(-t)$ rostoucí, stačí hledat pouze extrémy funkce g na množině N. Označme $\Phi(x, y) := 4x^2 + 6y^2 - 1$. Ze spojitosti funkce Φ plyne uzavřenost množiny N. Množina N je elipsa a tedy je též omezená. Dohromady tedy máme, že N je kompaktní. Ze spojitosti funkce g pak plyne existence maxima a minima g na N.

Nyní ověříme předpoklady věty o Lagrangeových multiplikátorech. Funkce g a Φ jsou C^1 na $\mathbb{R}^2$ a $\nabla\Phi(x, y) = [8x, 12y]$ je nulový pouze v bodě $[0, 0] \notin N$.

Z věty o Lagrangeových multiplikátorech plyne, že body, v nichž může být extrém, jsou pouze body $[x, y] \in N$, pro které existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, jež řeší soustavu rovnic $\nabla(g - \lambda\Phi)(x, y) = [0, 0]$, $\Phi(x, y) = 0$. Toto splňují pouze body $\left[\pm\sqrt{\frac{1}{8}}, \pm\sqrt{\frac{1}{12}}\right]$. Z toho plyne, že maximum f na M se nabývá v bodech $\pm\left[\sqrt{\frac{1}{8}}, \sqrt{\frac{1}{12}}, -\sqrt{\frac{1}{8}}, -\sqrt{\frac{1}{12}}\right]$ a je rovno $\operatorname{arccotg}\left(-\sqrt{\frac{1}{96}}\right)$ a minimum f na M se nabývá v bodech $\pm\left[\sqrt{\frac{1}{8}}, -\sqrt{\frac{1}{12}}, -\sqrt{\frac{1}{8}}, \sqrt{\frac{1}{12}}\right]$ a je rovno $\operatorname{arccotg}\left(\sqrt{\frac{1}{96}}\right)$.

Úloha 2 (25 bodů)

Budeme integrovat přes množinu

$$\widetilde{M} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < xy < 3,\ 2x < y^2 < 4x\right\},$$

platí $\lambda_2(M \setminus \widetilde{M}) = 0$. Použijeme substituci $u = xy$, $v = \frac{y^2}{x}$, $(u, v) \in (0, 3) \times (2, 4) =: U$. Platí

$$uv = y^3, \quad \frac{u^2}{v} = x^3.$$

Pro $\varphi(x, y) = (xy, \frac{y^2}{x})$ tedy existuje φ^{-1} na U a platí

$$\varphi^{-1}(u, v) = \left((uv)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{u^2}{v}\right)^{\frac{1}{3}}\right),$$

$$\varphi^{-1}(U) = \widetilde{M},$$

$$J_{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{v}{3(uv)^{2/3}} & \frac{u}{3(uv)^{2/3}} \\ \frac{2}{3(uv)^{1/3}} & -\frac{u^2}{3(uv)^{4/3}} \end{pmatrix}$$

a

$$|\det J_{\varphi^{-1}}| = \frac{1}{3v}.$$

Dále $y^6 = u^2v^2$ a $\det J_{\varphi^{-1}} \neq 0$ na U. Podle věty o substituci a Fubiniovy věty platí

$$\int_{\widetilde{M}} 3y^6 = \int_U 3u^2v^2 \cdot \frac{1}{3v} = \int_0^3 \int_2^4 u^2 v \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^3 \cdot \left[\frac{v^2}{2}\right]_2^4 = 54.$$

Úloha 3 (25 bodů)

(a) Nejdříve vyjádříme věrohodnost

$$L_n(\beta;\mathbf{X}) = \alpha^n \beta^{-\alpha n} \left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{\alpha-1} \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i}{\beta}\right)^{\alpha}\right\}, \quad X_i > 0,\ \forall i.$$

Logaritmická věrohodnost je pak

$$l_n(\beta;\mathbf{X}) = n\log\alpha - \alpha n\log\beta + (\alpha-1)\sum_{i=1}^n \log X_i - \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i}{\beta}\right)^{\alpha}.$$

Následně zderivováním dostaneme skórovou statistiku

$$U_n(\beta;\mathbf{X}) = -\frac{\alpha n}{\beta} + \alpha\beta^{-\alpha-1}\sum_{i=1}^n X_i^{\alpha}.$$

Maximálně věrohodný odhad je řešením věrohodnostní rovnice

$$\partial l_n(\beta;\mathbf{X})/\partial\beta = 0$$

vzhledem k neznámému parametru β, tj.

$$\hat\beta = \sqrt[\alpha]{\frac{\sum_{i=1}^n X_i^{\alpha}}{n}}.$$

Pozorovaná (výběrová) informace je

$$I_n(\beta;\mathbf{X}) = -\frac{1}{n}\frac{\partial U_n(\beta;\mathbf{X})}{\partial\beta} = -\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{n\beta^{\alpha+2}}\sum_{i=1}^n X_i^{\alpha},$$

která po vyčíslení v maximálně věrohodném odhadu nabývá kladné hodnoty

$$I_n(\hat\beta;\mathbf{X}) = \alpha^2\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^{\alpha}}{n}\right)^{-2/\alpha} > 0.$$

Tím pádem je nalezený maximálně věrohodný odhad právě jeden.

(b) Fisherovu informaci spočítáme jako

$$I(\beta) = \mathsf{E} I_n(\beta;\mathbf{X}) = \frac{\alpha^2}{\beta^2},$$

protože

$$\mathsf{E}X_i^{\alpha} = \int_0^{\infty} \alpha\beta^{-\alpha}x^{2\alpha-1}\exp\left\{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right\}\mathrm{d}x = \beta^{\alpha}\int_0^{\infty} y e^{-y}\mathrm{d}y = \beta^{\alpha}.$$

Pak platí, že

$$\sqrt{n}\left(\hat\beta-\beta\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathsf{N}\left(0, \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right), \quad n\to\infty.$$

(c,i) Test podílem věrohodnosti pro nulovou hypotézu $H_0 : \beta = \beta_0$ oproti alternativě $H_1 : \beta \neq \beta_0$ je založen na testové statistice

$$D_n = 2\log\frac{L_n(\hat\beta;\mathbf{X})}{L_n(\beta_0;\mathbf{X})} = 2\alpha n\log\beta_0 + 2\sum_{i=1}^n\left(\frac{X_i}{\beta_0}\right)^{\alpha} - 2n - 2n\log\sum_{i=1}^n X_i^{\alpha}$$

a H_0 zamítáme ve prospěch H_1, když $D_n > \chi_1^2(1-\alpha)$, kde $\chi_1^2(1-\alpha)$ je $(1-\alpha)$-kvantil χ^2 rozdělení o jednom stupni volnosti.

(c,ii) Raoův skórový test pro nulovou hypotézu $H_0 : \beta = \beta_0$ oproti alternativě $H_1 : \beta \neq \beta_0$ je založen například na testové statistice

$$R_n = \frac{[U_n(\beta_0; \mathbf{X})]^2}{n I(\beta_0)} = n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i}{\beta_0} \right)^{\alpha} - 1 \right)^2$$

a H_0 zamítáme ve prospěch H_1, když $R_n > \chi_1^2(1-\alpha)$.

(c,iii) Waldův test pro nulovou hypotézu $H_0 : \beta = \beta_0$ oproti alternativě $H_1 : \beta \neq \beta_0$ je založen například na testové statistice

$$W_n = n \left(\hat{\beta} - \beta_0 \right)^2 I\left(\hat{\beta} \right) = n\alpha^2 \left(1 - \beta_0 \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^{\alpha}}{n} \right)^{-1/\alpha} \right)^2$$

a H_0 zamítáme ve prospěch H_1, když $W_n > \chi_1^2(1-\alpha)$.

Úloha 4 (25 bodů)

(a) Pro očekávaný výnos portfolia platí

$$\begin{aligned} \mu_P(x) &= \mathbb{E}[x\ V_A + (1-x)\ V_B] = x\ \mu_A + (1-x)\ \mu_B \\ &= 4x + 2(1-x) = 2x + 2. \end{aligned}$$

Očekávaný výnos bude maximální pro $x = 1$, jeho hodnota bude $\mu_P(1) = 4$.

(b) Potřebujeme $\mathrm{cov}(V_A, V_B) = \rho\sigma_A\sigma_B = 2\rho$. Dále

$$\begin{aligned} \sigma_P^2(x) &= \mathrm{var}[x\ V_A + (1-x)V_B] = x^2\sigma_A^2 + (1-x)^2\sigma_B^2 + 2x(1-x)\rho\sigma_A\sigma_B \\ &= 4x^2 + (1-x)^2 + 4\rho\ x(1-x) \\ &= (5-4\rho)x^2 + (4\rho-2)x + 1. \end{aligned}$$

Pro minimalizaci rozptylu spočítáme

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_P^2(x)}{\mathrm{d}x} = 2(5-4\rho)x + (4\rho-2) = 0.$$

Vzhledem ke kladnému koeficientu u x^2 dostáváme nejmenší rozptyl pro

$$x_o(\rho) = \max\left\{0, \frac{2-4\rho}{2(5-4\rho)}\right\}.$$

(c) V případě nezávislosti máme $\rho = 0$ a tedy $x_o(0) = 2/5$. Portfolio je $1/5A + 4/5B$. Veškeré bohatství bude investováno do B v případě $x_o(\rho) = 0$ a to je, právě když $\rho \in [1/2, 1]$.

(d) Z předpokladů máme pro výnos portfolia

$$V_P \sim N(\mu_P(x), \sigma_P^2(x)),$$

kde

$$\mu_P(x) = 2x + 1, \quad \text{a} \quad \sigma_P^2(x) = 9x^2 - 6x + 1 = (3x-1)^2.$$

Ukazatel $\mathrm{VaR}_{0,95}$ je definován jako kvantil pro ztrátu

$$\mathbb{P}[-V_P \leq \mathrm{VaR}_{0,95}] = 0,95.$$

Z toho dostáváme (po převodu na normované normální rozdělení)

$$\mathrm{VaR}_{0,95}(x) = u_{0.95}\ \sigma_P(x) - \mu_P(x) = 1,645\ |3x-1| - 2x - 1.$$

Rizikově averzní chce **minimalizovat** $\mathrm{VaR}_{0,95}$. $\mathrm{VaR}_{0,95}(x)$ je minimální pro $x = 1/3$. Optimální portfolio je $1/3A + 2/3B$.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2022

Studijní program: Finanční a pojistná matematika

Varianta B – **Řešení**

Úloha 1 (25 bodů)

a) $D_f = \{(x, y) \colon x \neq 0\}$.

b) Pro $x \neq 0$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Obě parciální derivace jsou spojité v bodě $(1, 1)$, tedy totální diferenciál existuje. Po dosazení dostáváme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = \frac{1}{2},$$

tedy $Df(1, 1)(h, k) = \frac{1}{2}(-h + k)$.

c) Parciální derivace f podle y je na definičním oboru funkce f nenulová, tedy f nemá žádné lokální extrémy.

d) Z vlastností funkce arctg plyne $\sup f = \frac{\pi}{2}, \inf f = -\frac{\pi}{2}$ a těchto hodnot funkce f nenabývá. Vskutku, $\lim_{y \to \pm\infty} f(1, y) = \pm\frac{\pi}{2}$.

Úloha 2 (25 bodů)

Použijeme substituci $t = \sqrt{2x + 1}$, $x = \frac{t^2 - 1}{2}$, $\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t$, kterou převedeme na integrál

$$\int_1^3 \frac{t^3}{t^2 + 5t + 6}\,\mathrm{d}t = \int_1^3 t - 5\,\mathrm{d}t + \int_1^3 \frac{19t + 30}{t^2 + 5t + 6}\,\mathrm{d}t$$

Rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{19t + 30}{t^2 + 5t + 6} = -\frac{8}{t + 2} + \frac{27}{t + 3}$$

Tedy dostáváme

$$\int_1^3 \frac{t^3}{t^2 + 5t + 6}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} - 5t\right]_1^3 - [8 \log(t + 2)]_1^3 + [27 \log(t + 3)]_1^3$$

Hodnota integrálu je tedy rovna

$$-6 - 8 \log \frac{5}{3} + 27 \log \frac{3}{2}.$$

Úloha 3 (25 bodů)

(a) Nejdříve vyjádříme věrohodnost

$$L_n(\phi; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) = \phi^n \prod_{i=1}^n X_i \exp\left\{-\phi \sum_{i=1}^n X_i Y_i\right\}, \; X_i \in (0, 1), \; Y_i > 0, \; \forall i.$$

Logaritmická věrohodnost je pak

$$\ell_n(\phi; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) = n \log \phi + \sum_{i=1}^n \log X_i - \phi \sum_{i=1}^n X_i Y_i.$$

Následně zderivováním dostaneme skórovou statistiku

$$U_n(\phi; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) = \frac{n}{\phi} - \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i.$$

Hledaný maximálně věrohodný odhad je řešením věrohodnostní rovnice $\partial \ell_n(\phi; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}])/\partial \phi = 0$ vzhledem k neznámému parametru ϕ, tj.

$$\hat{\phi} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}.$$

Pozorovaná (výběrová) informace je

$$I_n(\phi; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) = -\frac{1}{n} \frac{\partial U_n(\phi; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}])}{\partial \phi} = \frac{1}{\phi^2},$$

která po vyčíslení v maximálně věrohodném odhadu nabývá kladné hodnoty

$$I_n(\hat{\phi}; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{n} \right)^2 > 0.$$

Tím pádem je nalezený maximálně věrohodný odhad právě jeden.

(b) Fisherovu informaci spočítáme jako

$$I(\phi) = \mathrm{E} I_n(\phi; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) = \frac{1}{\phi^2}.$$

Pak platí, že

$$\sqrt{n} \left(\hat{\phi} - \phi \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathrm{N} \left(0, \phi^2 \right), \quad n \to \infty.$$

(c,i) Test podílem věrohodnosti pro nulovou hypotézu $H_0 : \phi = 1$ oproti alternativě $H_1 : \phi \neq 1$ je založen na testové statistice

$$D_n = 2 \log \frac{L_n(\hat{\phi}; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}])}{L_n(1; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}])} = 2n \log \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i} - 2 \left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \right)$$

a H_0 zamítáme ve prospěch H_1, když $D_n > \chi^2_1(1-\alpha)$, kde $\chi^2_1(1-\alpha)$ je $(1-\alpha)$-kvantil χ^2 rozdělení o jednom stupni volnosti.

(c,ii) Raoův skórový test pro nulovou hypotézu $H_0 : \phi = 1$ oproti alternativě $H_1 : \phi \neq 1$ je založen například na testové statistice

$$R_n = \frac{[U_n(1; [\mathbf{X}, \mathbf{Y}])]^2}{n I(1)} = \frac{1}{n} \left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \right)^2$$

a H_0 zamítáme ve prospěch H_1, když $R_n > \chi^2_1(1-\alpha)$.

(c,iii) Waldův test pro nulovou hypotézu $H_0 : \phi = 1$ oproti alternativě $H_1 : \phi \neq 1$ je založen například na testové statistice

$$W_n = n \left(\hat{\phi} - 1 \right)^2 I \left(\hat{\phi} \right) = n \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{n} \right)^2$$

a H_0 zamítáme ve prospěch H_1, když $W_n > \chi^2_1(1-\alpha)$.

Úloha 4 (25 bodů)

a) Kupónová platba je $C = rN$. Rovnice pro výpočet výnosu do splatnosti i je

$$-P_0 + C \sum_{t=1}^{n} \left(\frac{1}{1+i} \right)^t + N \left(\frac{1}{1+i} \right)^n = 0.$$

b) Diskontní faktor odvozený od výnosu do splatnosti i je $v = \frac{1}{1+i}$. Rovnice z bodu a) pak má při $P_0 = N$ tvar

$$-N + C\sum_{t=1}^{n} v^t + Nv^n = 0.$$

Dále ji upravíme a řešíme vzhledem k neznámé i.

$$\begin{aligned} rNv\frac{1-v^n}{1-v} &= N(1-v^n) \\ r\frac{1}{1+i}\frac{1}{1-\frac{1}{1+i}} &= 1 \\ \frac{r}{i} = 1 \Leftrightarrow i &= r. \end{aligned}$$

c) Čistá současná hodnota investice do dluhopisu při hodnotící úrokové míře i je

$$NPV(i) = -P_0 + C\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{1}{1+i}\right)^t + N\left(\frac{1}{1+i}\right)^n.$$

Pro $P_0 = N$ je podle bodu b) $i = r$ a $NPV(r) = 0$. Pro $P_0 < N$ bude tedy $NPV(r) > 0$, což znamená, že investice do nákupu dluhopisu je výhodná. Naopak pro $P_0 > N$ je $NPV(r) < 0$ a dluhopis se nevyplatí koupit.